XXIII Topologie et probabilités

XXIII.A Questions de cours :

1. Soit A une partie de E, montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3. Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.

XXIII.B Exercices topologie :

Exercice 1: *

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 2: * Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 4: * Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$. Alors $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Si l'élève n'a pas encore vu le cours sur la diagonalisation, trigonalisation il admettre que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

XXIII.C Exercices probabilités :

Exercice 6: * Formule de Wald**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes des précédentes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum k = 1^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

1. Montrer que $G_S = G_T \circ G_X$.
2. En déduire que si T et les X_n admettent une espérance finie alors S aussi et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X_1]$

Exercice 7: ** Loi des moments faible

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n-1\}$.
Montrer que la loi de X est déterminée par $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Exercice 8: ** Somme de deux lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 9: * Déterminer les moments**

Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$P(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En employant la fonction génératrice de X, déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10: ** Fonctions génératrices des lois usuelles

Déterminer les fonctions génératrices des lois suivantes :

1. loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$
2. loi binomiale
3. loi de Poisson
4. loi géométrique

Exercice 11: * Somme Poisonnienne de Bernoulli**

Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ et les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, montrer que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.